e4a concours

**CONCOURS ENSAM - ESTP – ENSAIS - ECRIN - ARCHIMEDE**

## Epreuve de Mathématiques 2

## durée 4 heures

---

**Exercice 1**

$P$ désigne le plan affine euclidien rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$, $k$ est un réel strictement positif. On note $(x,y)$ le couple des coordonnées d'un point $M$ de $P$.
Soit $(\gamma)$ l'hyperbole équilatère d'équation cartésienne : $xy = k$.

1° On considère trois points $A$, $B$, $C$ de $(\gamma)$, deux à deux distincts, dont les abscisses sont notées $a$, $b$, $c$ respectivement.

a) Déterminer les coordonnées $(\alpha,\beta)$ du centre de gravité $G$ du triangle $ABC$.

b) Déterminer les coordonnées $(\lambda,\mu)$ de l'orthocentre $H$ du triangle $ABC$.
Vérifier que $H$ appartient à $(\gamma)$.

2° On suppose, dans cette question, que $ABC$ est un triangle équilatéral.

a) Que peut-on dire de $G$ et $H$ ?

b) Montrer que $a$, $b$, $c$ sont les racines du polynôme $P(X)$ avec :

$$P(X) = X^3 - 3\lambda X^2 - 3\frac{k^2}{\lambda^2}X + \frac{k^2}{\lambda}.$$

c) On appelle sommets de $(\gamma)$ les points d'intersection de $(\gamma)$ avec la droite d'équation : $y = x$. On suppose que $H$ n'est pas l'un des sommets de $(\gamma)$.
Montrer que l'intersection du cercle circonscrit au triangle $ABC$ avec $(\gamma)$ contient un point $D$ distinct de $A$, $B$, $C$. Préciser les coordonnées de $D$.

3° Soit $r$ un réel non nul et $Q(X)$ le polynôme défini par :

$$Q(X) = X^3 - 3rX^2 - 3\frac{k^2}{r^2}X + \frac{k^2}{r}.$$

a) Déterminer le signe du produit $Q(0)Q(r)$. En déduire que $Q(X)$ admet trois racines réelles deux à deux distinctes et non nulles notées $r_1, r_2, r_3$.

b) Soient $R_1, R_2, R_3$ les points de $(\gamma)$ d'abscisses respectives $r_1, r_2, r_3$.
Démontrer que le triangle $R_1R_2R_3$ est équilatéral.

4° Donner une construction géométrique permettant d'obtenir tous les triangles équilatéraux dont les sommets appartiennent à $(\gamma)$.

**Tournez la page S.V.P.**

**Exercice 2**

Soit $f$ l'application définie sur $]0,+\infty[\times[0,+\infty[$ par : $(x,t)\to f(x,t)=e^{-t^2\sqrt{x}}\cos\left(\frac{t^3}{3}\right)$.

1° Pour $x$ réel strictement positif fixé, montrer que l'application $t\to f(x,t)$ définie sur $[0,+\infty[$, est intégrable sur $[0,+\infty[$.

2° Soit $F$ l'application définie sur $]0,+\infty[$ par :

$$x\to F(x)=\int_0^{+\infty} e^{-t^2\sqrt{x}}\cos\left(\frac{t^3}{3}\right)dt\ .$$

a) Prouver que $F$ est de classe $C^1$ sur $]0,+\infty[$, et, pour $x$ strictement positif, donner une expression de $F'(x)$ sous forme d'une intégrale.

b) Montrer que $F'$ est aussi définie sur $]0,+\infty[$ par :

$$F'(x)=\int_0^{+\infty} -te^{-t^2\sqrt{x}}\sin\left(\frac{t^3}{3}\right)dt\ .$$

En déduire que $F$ est de classe $C^2$ sur $]0,+\infty[$ et donner une expression de $F''(x)$ sous forme d'une intégrale.

3° Montrer que $F$ est solution sur $]0,+\infty[$ de l'équation différentielle suivante :

$$y''(x)-2\sqrt{x}\,y'(x)-\frac{1}{2\sqrt{x}}y(x)=0\ .$$

4° Déterminer la limite de $F(x)$ lorsque $x$ tend vers $+\infty$.

5° On admet le résultat suivant : $\int_0^{+\infty} e^{-u^2}du=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

a) Déterminer un réel $K$ tel que pour tout réel $u$ :

$$|\cos u-1|\le Ku^2$$

b) Justifier l'existence du réel $J$ défini par : $J=\int_0^{+\infty} e^{-u^2}u^6\,du$.

Pour $x$ réel strictement positif, majorer l'intégrale : $\int_0^{+\infty} e^{-t^2\sqrt{x}}\left|\cos\left(\frac{t^3}{3}\right)-1\right|dt$ en fonction de $J$ et de $x$.

c) En déduire que $F(x)$ est équivalent à $\frac{\sqrt{\pi}}{2x^{1/4}}$ lorsque $x$ tend vers $+\infty$.

**Exercice 3**

Les deux parties de cet exercice peuvent être traitées indépendamment.

R est le corps des nombres réels, C celui des nombres complexes et $n$ est un entier naturel supérieur ou égal à 2. K = R ou K = C. On note E le K-espace vectoriel des matrices carrées d'ordre $n$ à coefficients dans K. $O$ est la matrice nulle de E, $I$ est la matrice identité de E. Pour $M$ élément de E, ${}^tM$ et $tr(M)$ désignent respectivement la matrice transposée de $M$ et la trace de $M$. On note F le K-espace vectoriel des matrices à $n$ lignes et une colonne et à coefficients dans K. Pour $Y$ élément de $F$, ${}^tY$ désigne la matrice transposée de $Y$.

Soient $A$ et $B$ deux éléments de E et $f$ l'endomorphisme de E défini par :

$$\forall M \in \mathrm{E} \ , \ f(M) = AM - MB .$$

Première partie. Dans cette partie K = C.

1° On suppose que $A$ et $B$ ont une valeur propre commune notée $\lambda$.

a) Justifier l'existence de $Y$ et $Z$ éléments non nuls de F vérifiant :

$$AY = \lambda Y \quad \text{et} \quad {}^tBZ = \lambda Z .$$

b) Prouver que $Y\,{}^tZ$ est un élément non nul de E. Calculer $f(Y\,{}^tZ)$.

2° On suppose qu'il existe $M_0$ élément non nul de E tel que : $f(M_0) = O$.

a) Pour $k$ entier naturel, prouver que : $A^k M_0 = M_0 B^k$ .En déduire que pour tout polynôme $P$ à coefficients complexes on a :

$$P(A)\,M_0 = M_0\,P(B).$$

b) Soit $P_A$ le polynôme caractéristique de $A$. Que peut-on dire de $P_A(A)$ ?
En déduire que $P_A(B)$ n'est pas inversible dans E, et ensuite que $A$ et $B$ ont une valeur propre commune.

3° Démontrer que $f$ est une bijection de E sur E si et seulement si $A$ et $B$ n'ont aucune valeur propre en commun.

4° En déduire que $\mu$ est une valeur propre de $f$ si et seulement s'il existe $\alpha$ valeur propre de $A$ et $\beta$ valeur propre de $B$ telles que : $\mu = \alpha - \beta$ .

Deuxième partie. Dans cette partie K = R.

1° Pour $M$ et $N$ appartenant à E, on pose : $\langle M \mid N \rangle = tr\left({}^tM\,N\right)$. Montrer que l'on définit ainsi un produit scalaire sur E.
Dans la suite de l'exercice, E est muni de ce produit scalaire.

2° On note $f^*$ l'endomorphisme adjoint de $f$. Montrer que :

$$\forall M \in \mathrm{E} \ , \ f^*(M) = {}^tAM - M\,{}^tB .$$

**Tournez la page S.V.P.**

3° a) Soit $D$ appartenant à E vérifiant : $\forall M \in \mathrm{E}$ , $DM = MD$. Prouver qu'il existe $a$ dans R tel que : $D = aI$.

b) En déduire que $f$ est l'application nulle si et seulement s'il existe $a$ dans R tel que :

$$A = B = aI .$$

c) Démontrer que l'endomorphisme $f$ est autoadjoint si et seulement si les matrices $A$ et $B$ sont symétriques.

4° a) On suppose que $B$ est une matrice orthogonale et antisymétrique. Montrer que $n$ est un entier pair.

b) On suppose de plus que $A$ est une matrice orthogonale et symétrique. Démontrer que l'endomorphisme $\frac{1}{\sqrt{2}} f$ est un endomorphisme orthogonal de E.

5° On considère le cas particulier : $n = 2$ .On pose :

$$E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} , E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} , E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} , E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} , B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}.$$

Déterminer la matrice de $f$ dans la base $b$ de E, où $b = (E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$.

Vérifier les résultats démontrés aux questions 3° b), 3° c) et 4° b).

IMPRIMERIE NATIONALE. – D'après documents fournis